فصل ۱

نمونه کار تایپ لاتک

★ typelatex.ir ★

★ متون ساده و فرمول‌دار

برای انجام محاسبات آماری اغلب لازم است که توابع توزیع احتمال، یا توابع احتمال و یا توابع چگالی احتمال معلوم باشند. اما در مطالعه پدیده‌های تصادفی اغلب اتفاق می‌افتد که برای بعضی متغیرهای تصادفی نمی‌توان هیچ یک از این توابع را تعیین کرد. ولی می‌توان میانگین و یا واریانس آنها را محاسبه کرد. در چنین مواردی هرچند نمی‌توان احتمال‌های دقیق را محاسبه کرد اما می‌توان با استفاده از قضایای حدی آنها را تقریب زد.

تعریف.(همگرایی در احتمال): دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ در احتمال به متغیر تصادفی X همگراست، هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = ۰$$

این همگرایی را با نماد $X_n \xrightarrow{P} X$ نشان می‌دهیم.

تعریف.(همگرایی تقریباً حتمی): دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ تقریباً حتمی به متغیر تصادفی X همگراست، هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$ داشته باشیم:

$$P(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| \geq \epsilon) = ۰ \equiv P(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| < \epsilon) = ۱$$

این همگرایی را با نماد $X_n \xrightarrow{a.s} X$ نشان می‌دهیم.

تعریف.(همگرایی در توزیع): دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ در توزیع به متغیر تصادفی X همگراست، هرگاه به ازای تمام xهایی که در آنها $F_X(x)$ پیوسته است، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

این همگرایی را با نماد $X_n \xrightarrow{d} X$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۰.۱ ***(قانون ضعیف اعداد بزرگ):*** *فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع (iid) با میانگین μ و واریانس متناهی $\sigma^۲$ باشند. $S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$، آنگاه:*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu; \quad n \longrightarrow \infty.$$

فرض کنید که $\boldsymbol{Y}$ یک بردار تصادفی p بُعدی با تابع چگالی احتمال $f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})$ روی $\mathcal{R}^p$ و بردار $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_d)^\top$ بردار پارامترهای مجهول باشد. "$\top$" را "ترانهاده" بردار یا ماتریس تعریف می‌کنیم. اگر w_1،...،w_n یک نمونه تصادفی nتایی از بردار تصادفی $\boldsymbol{W}$ با تابع چگالی $f(\boldsymbol{w};\boldsymbol{\theta})$ و $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{w}_1^\top,\cdots,\boldsymbol{w}_n^\top)$ باشد، آنگاه،

$$f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})=\prod_{j=1}^{n} f(w_j;\boldsymbol{\theta})$$

حال می‌خواهیم بردار $\boldsymbol{\theta}$ را به روش ماکسیمم درستنمایی برآورد کنیم. تابع ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ به صورت $L(\boldsymbol{\theta})=f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})$ داده می‌شود. برآورد ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ با نماد $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ نشان داده شده و از حل معادله درستنمایی $\frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}=0$ و یا به طور معادل $\frac{\partial logL(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}=0$ بدست می‌آید. فرض کنید که،

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{y})=-\frac{\partial^2 log\ L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}^\top}$$

★★ ایجاد پاورقی

فرض کنید $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_d)$ بردار پارامتر توزیع مورد نظر باشد، روش نیوتن–رافسون[1]برای حل معادله درستنمایی $S(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})=0$، بردار گرادیان لگاریتم تابع درستنمایی یعنی $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})$ را با بسط سری تیلور حول $\boldsymbol{\theta}^{(m)}$ به صورت زیر تقریب می‌زند:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})\approx \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}^{(m)})-\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}^{(m)};\boldsymbol{y})(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^{(m)})$$

مقدار $\boldsymbol{\theta}^{(m+1)}$ از مساوی صفر قراردادن عبارت سمت راست رابطه بالا بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{\theta}^{(m+1)}=\boldsymbol{\theta}^{(m)}+\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^{(m)};\boldsymbol{y})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta}^{(m)}) \tag{1.1}$$

★★★★ با ما همراه باشید typelatex.ir ★★★★

[1] Newton-Raphson Method

★★★ فرمول‌های چند خطی

برای این منظور داریم:

$$\begin{aligned}
\|l_{(n)}(\boldsymbol{\mu})(\omega)-l_{(n)}(\boldsymbol{\mu}^{(0)}(\omega)\| = \|&\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{m}\frac{(y_{i1}(\omega)-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{(y_{i1}(\omega)-\mu_1^{(0)})^2}{2\sigma_1^2}]\\
&+\frac{1}{n}[\sum_{i=m+1}^{k}\frac{(y_{i2}(\omega)-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}-\sum_{i=m+1}^{k}\frac{(y_{i2}(\omega)-\mu_2^{(0)})^2}{2\sigma_2^2}]\\
&+\frac{1}{2n}[\sum_{i=k+1}^{n}(\boldsymbol{y}_i(\omega)-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_i(\omega)-\boldsymbol{\mu})\\
&-\sum_{i=k+1}^{n}(\boldsymbol{y}_i(\omega)-\boldsymbol{\mu}^{(0)})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_i(\omega)-\boldsymbol{\mu}^{(0)})]\|\\
&\leqslant\frac{1}{n}\|\sum_{i=1}^{m}\frac{(y_{i1}(\omega)-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{(y_{i1}(\omega)-\mu_1^{(0)})^2}{2\sigma_1^2}\|\\
&+\frac{1}{n}\|\sum_{i=m+1}^{k}\frac{(y_{i2}(\omega)-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}-\sum_{i=m+1}^{k}\frac{(y_{i2}(\omega)-\mu_2^{(0)})^2}{2\sigma_2^2}\|\\
&+\frac{1}{2n}\|\sum_{i=k+1}^{n}(\boldsymbol{y}_i(\omega)-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_i(\omega)-\boldsymbol{\mu})\\
&-\sum_{i=k+1}^{n}(\boldsymbol{y}_i(\omega)-\boldsymbol{\mu}^{(0)})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_i(\omega)-\boldsymbol{\mu}^{(0)})\|
\end{aligned}$$

★★★★ انواع جدول‌ها

جدول ۱.۱: برآوردهای نقطه‌ای فواصل اطمینان ۹۰ درصد برای داده‌های شرکت اَپکس.

روش کمترین مربعات		روش مبتنی بر درستنمایی		
برآورد	فاصله اطمینان ۹۰ درصد	برآورد	فاصله اطمینان ۹۰ درصد	پارامترها
۷۱/۰	(۶۱/۸۳, ۸۰/۱۷)	۷۱/۰	(۶۴/۶۹, ۷۷/۳۱)	μ
۷۳/۶	(−, −)	۵۵/۱	(۷/۸۰, ۲۴۱/۵۴)	σ_b^2
۷۵/۶	(۴۵/۳۶, ۱۶۵/۲۰)	۷۵/۶	(۴۳/۷۷, ۱۴۷/۴۳)	σ^2
۰/۹۷۴	(۰/۱۵۰, ۶/۹۴۷)	۰/۷۲۹	(۰/۱۳۱, ۲/۴۶۶)	σ_b^2/σ^2
۰/۴۹۳	(۰/۱۳۰, ۰/۸۷۳)	۰/۴۲۲	(۰/۱۱۶, ۰/۷۱۲)	$\sigma_b^2/(\sigma_b^2+\sigma^2)$

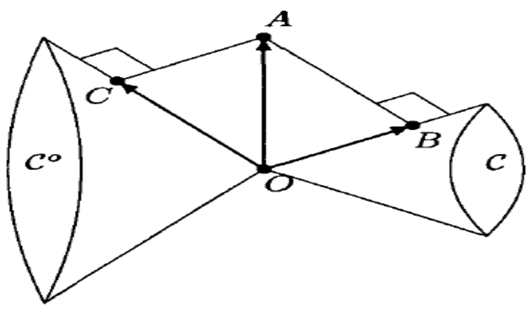
جدول ۲.۱: برآورد پارامترها و $p-value$.

مدل مقید		مدل نامقید		
نمره ($p-value$)	برآورد	نمره ($p-value$)	برآورد	
۳۵/۱۸(< ۰/۰۰۰۱)	–	۳۵/۱۸(< ۰/۰۰۰۱)	–	آزمون نمره
۴/۰۴۴(۰/۰۴۴)	۷/۳۱۴	۴/۰۴۴(۰/۰۴۴)	۷/۳۱۴	β_0
۰/۸۹۷(۰/۳۴۴)	۰/۰۸۵	۰/۸۹۷(۰/۳۴۴)	۰/۰۸۵	β_1
۳/۸۳۳(۰/۰۲۵)	۰/۵۱۰	۳/۸۳۳(۰/۰۵۱)	۰/۵۱۰	β_2

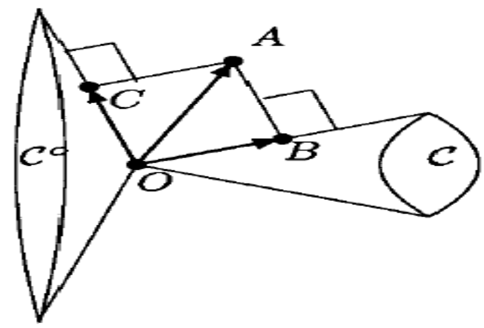
جدول ۳.۱: MSE نسبی برآوردگرهای بدست آمده از الگوریتم‌های مختلف با $n = ۲۰$.

MSE نسبی	مقادیر پارامتر						
	$\beta_0 = ۰$	$\beta_1 = ۰$	$\beta_2 = ۰$	$\sigma^2 = ۱$	$d_{11} = ۱$	$d_{12} = ۰/۵$	$d_{22} = ۱$
MSE_1/MSE_0	۶۱/۳۷	۵۰/۷۴	۵۰/۲۰	–	–	–	–
MSE_2/MSE_0	۶۱/۳۸	۵۰/۷۵	۵۰/۲۰	۱۰۰/۱	۱۰۰/۵	۱۰۰/۱	۱۰۰/۰
MSE_3/MSE_0	۶۱/۳۶	۵۰/۷۴	۵۰/۲۰	۱۰۰/۶	۱۰۰/۴	۱۰۲/۲	۱۰۱/۰
	$\beta_0 = ۰$	$\beta_1 = ۰/۰۵$	$\beta_2 = ۰/۰۵$	$\sigma^2 = ۱$	$d_{11} = ۱$	$d_{12} = ۰/۵$	$d_{22} = ۱$
MSE_1/MSE_0	۸۱/۵۳	۷۵/۴۷	۵۲/۰۲	–	–	–	–
MSE_2/MSE_0	۸۱/۵۴	۷۵/۴۸	۵۲/۰۲	۱۰۰/۱	۱۰۰/۴	۱۰۰/۰۶	۱۰۰/۰
MSE_3/MSE_0	۸۱/۵۴	۷۵/۴۷	۵۲/۰۲	۱۰۰/۱	۱۰۰/۳	۱۰۲/۵۲	۱۰۰/۹
	$\beta_0 = ۰$	$\beta_1 = ۰/۱$	$\beta_2 = ۰/۱$	$\sigma^2 = ۱$	$d_{11} = ۱$	$d_{12} = ۰/۵$	$d_{22} = ۱$
MSE_1/MSE_0	۹۷/۱۵	۹۶/۲۰	۵۸/۰۲	–	–	–	–
MSE_2/MSE_0	۹۷/۱۶	۹۶/۲۲	۵۸/۰۲	۱۰۰/۱	۱۰۰/۳	۱۰۰/۱	۱۰۰/۰
MSE_3/MSE_0	۹۷/۱۵	۹۶/۲۰	۵۸/۰۲	۱۰۰/۱	۱۰۰/۴	۱۰۲/۰	۱۰۰/۴

★★★★★ ایجاد تصویر



شکل ۱.۱: تصویر متعامد **OA** روی $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}^\circ$ وقتی که $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{I}$ است.



شکل ۲.۱: تصویر متعامد **OA** روی $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}^\circ$ وقتی $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$ است.